LOI DE PROBABILITE D'UNE VARIABLE ALEATOIRE DISCRETE

&

LOI DE PROBABILITE D'UNE VARIABLE ALEATOIRE CONTINUE

-Ce cours sur les lois des variables aléatoires est très détaillé mais facile.

-Il fallait refaire tous les exercices pour bien assimiler ce cours.

UNIVERSITE HASSAN II DE CASABLANCA

FACULTE DES SCIENCES JURIDIQUES
ECONOMIQUES ET SOCIALES CASABLANCA
Année Universitaire 2019-2020

CALCUL DES PROBABILITES COURS ENS : 1

LOI DE PROBABILITE D'UNE VARIABLE ALEATOIRE DISCRETE

I Objectifs

- Les modèles mathématiques permettent de formaliser le comportement des phénomènes aléatoires. Après avoir définit le concept de probabilité, il convient e définir le concept de **variable aléatoire**.

- Dans une première approche nous dirons qu'une variable aléatoire consiste à **attribuer à chaque résultat de l'expérience aléatoire un nombre**. Par exemple en jouant à pile ou face avec une pièce de monnaie, si le côté apparaît vous gagnez 100Dhs, si le côté face apparaît vous perdez 100Dhs. Cette variable aléatoire est discrète car elle prend des valeurs +100 et -100.

-Définir **la loi de probabilité** d'une variable aléatoire **consiste à déterminer les probabilités des différents valeurs** de cette variable aléatoire. Dans cet exemple la variable aléatoire prend les valeurs +100 et -100 avec les probabilités de 1/2 et 1/2 .

Les variables aléatoires (v.a) sont définies avec des nombres réels.

II L'essentiel à savoir

A. définition d'une variable aléatoire discrète

Soit l'ensemble fondamental **Ω**, constitué d'un nombre fini d'éléments ou d'une infinité dénombrables d'éléments.

$\Omega = \{\omega_1 , \omega_2 , \dots , \omega_i , \dots, \omega_n, \dots.\}$

Définir une variable aléatoire **X** consiste à associer à chaque élément ω de **Ω** un nombre réel x.

$$\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\Omega \longrightarrow \mathbf{X}(\omega) = x$$

Remarque

Cette notation peut prêter à confusion car **la variable aléatoire X est une application en mathématiques**, l'image de ω est **X**(ω). En mathématiques, les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont souvent désignées par des lettres minuscules f , g , h … etc.

Avec cette terminologie : $y = f(x)$, y est l'image du nombre réel x.

Avec une variable aléatoire : x = X(ω), x est l'image de l'événement élémentaire ω ; cette image est un nombre réel.

Dans ce qui suit **les variables aléatoires sont désignées par des lettres majuscules et leurs réalisations par des lettres minuscules.**

Exemple

Une urne contient 100 boules de différents couleurs à savoir :

10 bleues, 10 rouges, 5 orange, 15 vertes, 20 noires , 40 marron.

Expériences aléatoire : tirer une boule dans l'urne.

Résultat : ($\omega \in \Omega$) : couleur de la boule extraite de l'urne.

Ω = { b , r , o , v , n , m } = { bleu, rouge, orange, …. , marron }

La couleur est identifiée par sa première lettre.

A chaque élément de **Ω** on assoie un nombre qui représente un gain en dirhams, ce nombre est négatif s'il s'agit d'une perte.

$b \longrightarrow \mathbf{X}(b) = 100$ $\qquad v \longrightarrow \mathbf{X}(v) = 100$

$r \longrightarrow \mathbf{X}(r) = 300$ $\qquad n \longrightarrow \mathbf{X}(n) = -200$

$o \longrightarrow \mathbf{X}(o) = -200$ $\qquad m \longrightarrow \mathbf{X}(m) = 50$

La variable aléatoire X est bien définie comme une application de **Ω** dans $\mathbb{R}$.

La variable aléatoire peut prendre quatre valeurs :

$x_1 = -200$, $x_2 = -50$, $x_3 = 100$, $x_4 = 300$

Ces valeurs de X apparaissent de façon aléatoire avec les expériences

Les éléments «o» et «n» ont la même image : **X**(o) = **X**(n) = -200

B. Loi de probabilité (ou distribution) d'une variable aléatoire discrète.

Définition

Soit **X** une variable aléatoire discrète définie sur l'ensemble fondamental **Ω.**

La probabilité de l'événement (X = x_i) est la probabilité de l'union des événements de qui ont pour image x_i.

Si $\omega_2, \omega_4, \omega_7$ vérifient : $\mathbf{X}(\omega_2) = \mathbf{X}(\omega_4) = \mathbf{X}(\omega_7) = x_i$

alors $\mathbf{P}(\mathbf{X}=x_i) = p_i = \mathbf{P}(\omega_2 \cup \omega_4 \cup \omega_7) = \mathbf{P}(\omega_2) + \mathbf{P}(\omega_4) + \mathbf{P}(\omega_7)$

La loi de probabilité de X est l'ensemble des couples (x_i, p_i) ; elle peut être présentée dans un tableau.

x	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n	Total
P(X=x)	p_1	P_2	...	P_i	...	p_n	1

Pour tout x_i, $\mathbf{P}(X=x_i) = p_i \geq 0$ et $\sum_i p_i = 1$

> Une loi de probabilité discrète est définie par les couples (x_i ,p_i) avec $\mathbf{P}(X=x_i) = p_i \geq 0$ et $\sum_i p_i = 1$

Exemple 1

Déterminons la loi de probabilité de la v.a.**X** proposée dans l'exemple précédent :

tirage d'une boule dans une urne.

$\mathbf{P}(\mathbf{X}=-200) = \mathbf{P}(o \cup n) = \mathbf{P}(o) + \mathbf{P}(n) = \frac{5}{100} + \frac{20}{100} = 0.25$

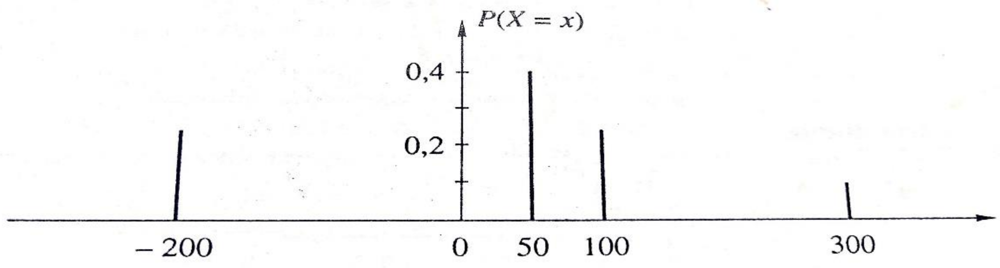
$\mathbf{P}(\mathbf{X}= 50) = \mathbf{P}(m) = \frac{40}{100} = 0.40$

$\mathbf{P}(\mathbf{X}= 100) = \mathbf{P}(b \cup v) = \mathbf{P}(b) + \mathbf{P}(v) = \frac{10}{100} + \frac{15}{100} = 0.25$

$\mathbf{P}(X= 300) = \mathbf{P}(r) = \frac{10}{100} = 0.10$

X=x	-200	50	100	300	Total
P(**X**=x)	0.25	0.40	0.25	0.10	1

Diagramme (en bâtons) de la loi



Exemple 2

Expérience aléatoire : répéter le lancer d'une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du côté face.

Variable aléatoire associée **X** : nombre de lancers nécessaires pour obtenir la première fois le côté face.

C'est-à-dire si F_i désigne l'événement «obtenir face au $i^{ème}$ lancer»

si P_i désigne l'événement «obtenir pile au $i^{ème}$ lancer»

F_1 : on obtient face au 1^{er} lancer : X = 1

$P_1 \cap F_2$: On obtient pile au 1^{er} lancer et face au 2^e : X = 2

$P_1 \cap P_2 \ldots P_{k-1} \cap F_k$: on obtient pour la 1^{er} fois face au $k^{ième}$ lancer : X=k

Ensemble des réalisations de X : $S_X = \{1, 2, \ldots, k, \ldots, n, n+1, \ldots\}$

$\mathbf{P}(X=k) = \mathbf{P}(P_1 \cap P_2 \ldots P_{k-1} \cap F_k)$

En raison de l'indépendance en probabilité et puisque $\mathbf{P}(F) = \mathbf{P}(P) = 1 / 2$

$\mathbf{P}(X=k) = p_k = \mathbf{P}(P_1) \,.\, \mathbf{P}(P_1) \ldots \mathbf{P}(P_{k-1})$

$p_k = \mathbf{P}(X=k) = 1 / 2^k$

L'ensemble des couples $(k \,,\, 1 / 2^k)$ constitue la loi de probabilité de X.

C. Fonction de répartition F

Définition

$$F(x) = \mathbf{P}(\mathbf{X} \leq x) = \mathbf{P}(\mathbf{X} \in]-\infty \,,\, x]) = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

Elle est aussi définie par :

$$F(x) = \mathbf{P}(X < k) = \mathbf{P}(X \in]-\infty \,,\, x]) = \sum_{x_i < x} p_i$$

Cette présence de deux définitions dans la littérature est un peu génante, elle modifie la valeur de F(x) aux points $X=x_i$ où la probabilité n'est pas nulle. Nous gardons la première définition qui devenue la plus usuelle.

F est une fonction croissante en escalier.

Exemple

Reprenons toujours la même variable aléatoire.

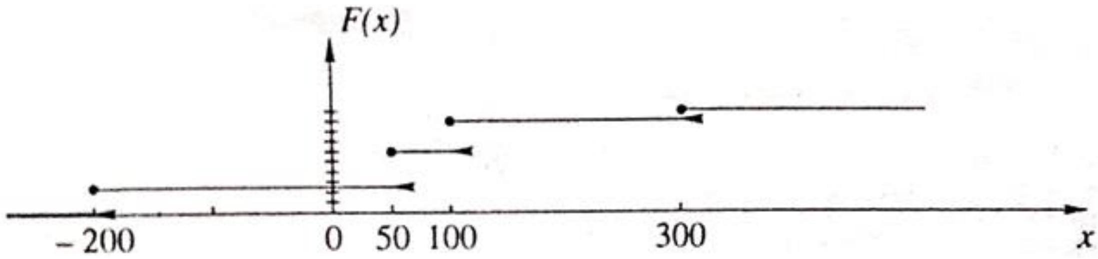
si $x < -200$, $F(x) = 0$

si $-200 \leq x < 50$, $F(x) = 0.25$

si $50 \leq x < 100$, $F(x) = P[X = -200] + P[X=50] = 0.25 + 0.40 = 0.65$

si $100 \leq x < 300$, $F(x) = 0.25 + 0.40 + 0.25 = 0.90$
si $x \geq 300$, $F(x) = 1$

.Graphe



Remarque
F(x) permet de retrouver les probabilités
$p_i = F(x_i) - F(x_{i-1}) = (p_1 + p_2 + ... p_i) - (p_1 + p_2 + ... p_{i-1})$

III Compléments

A. Loi d'un couple de variables aléatoires

Soit X une variable aléatoire définie sur $\mathbf{\Omega_1}$ et Y une variable aléatoire définie sur $\mathbf{\Omega_2}$. $X(\omega_1) = x$ et $Y(\omega_2) = y$, $Z = (X,Y)$ est un couple de variables aléatoires (X,Y)

$$z = Z(\omega_1, \omega_2) = (X(\omega_1), Y(\omega_2)) = (x,y)$$

La loi de probabilité du couple de variables aléatoirex (X,Y) est définie par l'ensemble des couples (x,y) et les probabilités d'obtenir ces couples (**désignée par la loi conjointe).**
Ainsi si l'on note :

$$p_{ij} = P(X = x_i \cap Y = y_j)$$
$$p_{ij} = P(X = x_i).P(Y = y_i | X = x_i)$$
$$p_{ij} = P(Y = y_i).P(X = x_i | Y = y_i)$$

Les variables X et Y sont indépendants si tous les événements $X = x_i$ et $Y = y_j$ le sont, c'est-à-dire :

$$p_{ij} = P(X = x_i).P(Y = y_i) = p_i \,.\, p_j$$

Loi de probabilité du couple (X,Y)

x \ y	y_1	y_2	…	y_j	…	y_q	Total
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1j}	…	p_{1q}	$p_{1.}$
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2j}	…	p_{2q}	$p_{2.}$
.	.	.	.	.	.	…	…
x_i	p_{i1}	p_{2i}	…	p_{ij}	…	p_{iq}	$p_{i.}$
..	.	.	.	.	.	…	…
x_p	p_{p1}	p_{p2}	…	p_{pj}	…	p_{pq}	$P_{p.}$
Total	$p_{.1}$	$p_{.2}$	…	$p_{.j}$	…	$p_{.q}$	$p_{..}=1$

B. Composition de plusieurs variables aléatoires

Une variable aléatoire est définie comme une application en mathématiques. Il est donc possible de faire avec les variables aléatoires toutes les opérations des applications : la somme, le produit, le quotient de deux variables.

Soit X une variable aléatoire définies sur $\boldsymbol{\Omega}$, sur $S_X = \{\text{ensemble des valeurs x}\}$

Y une variable aléatoire définies sur $\boldsymbol{\Omega}$, sur $S_Y = \{\text{ensemble des valeurs y}\}$

. Addition Z = X ⊕ Y

Pour $\omega \in \boldsymbol{\Omega}$, $\mathbf{Z}(\omega) = (\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y})(\omega) = (X)(\omega) + (Y)(\omega)$, soit $z = x + y$

Cette relation définit la lois d'addition de deux variables, elle a été notée $\oplus$ pour la distinguer du signe + qui concerne l'addition des nombres réels. Pour la suite on emploie le même symbole et on note : $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$

Exemple

X représente le nombre de points sur le premier dé : $S_X = \{1, 2, \ldots, 6\}$

Y représente le nombre de points sur le second dé : $S_Y = \{1, 2, \ldots, 6\}$

Si $\mathbf{X} = x = 3$ et $\mathbf{Y} = y = 5$, $\mathbf{Z} = z = 3 + 5 = 8$

$S_Z = \{2, 3, \ldots, 12\}$

Les probabilités de **Z** se déterminent à l'aide de celles de **X** et de **Y**.

IV Application

Enoncé

On considère 2 urnes U_1 et U_2. La première urne contient deux boules numérotées 1 et 2, la deuxième urne contient trois boules numérotées respectivement 0, 1, 2.

On tire une boule dans chaque urne. Soit X_1 la variable aléatoire « chiffre marqué sur la première boule » et soit X_2 la variable aléatoire « chiffre marqué sur la deuxième boule ».

1-Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Z = X1 X2 ?

2-Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire G = X1 + X2 ?

Solution

1-La loi du couple ($\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$) est déterminée par les couples de numéros issues d'une boule de U_1 et d'une boule de U_2. En raison de l'indépendance, les probabilités de ces couples se calculent par la formule pij = pi. . p.j soit :

$p_{ij} = P(\mathbf{X_1} = x_{1i} \cap \mathbf{X_2} = x_{2j}) = P(\mathbf{X_1} = x_{1i}).P(\mathbf{X_2} = x_{2j})$

$P(\mathbf{X_1} = x_{11}) = P(\mathbf{X_1} = x_{12}) = 1/2$

$x_{11} = 1$ et $x_{12} = 2$

$P(\mathbf{X_2} = x_{21}) = P(\mathbf{X_2} = x_{22}) = P(\mathbf{X_2} = x_{23}) = 1/3$

Dans le cours les variables sont notées **X** et **Y** au lieu de $\mathbf{X_1}$ et $\mathbf{X_2}$ ce qui évite une double indexation.

La loi du couple peut être représentée par le tableau suivant :

$\mathbf{X_2}$ / $\mathbf{X_1}$	0	1	2	Total
1	1/6	1/6	1/6	1/2
2	1/6	1/6	1/6	1/2
Total	1/3	1/3	1/3	1

Il est facile de vérifier que l'ensemble des réalisations z de **Z** est $\mathbf{S_Z} = \{0, 1, 2, 4\}$

Il faut ensuite calculer les quantités P(**Z** = z) à partir de la loi du couple ($\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$).

Exemple

Pour z = 2, les couples (x_1 , x_2) tels que $z = x_1 . x_2$ sont les couples (2,1) et (1,2) donc :

$(\mathbf{Z} = 2) = (\mathbf{X}_1 = 2 \cap \mathbf{X}_2 = 1) \cup (\mathbf{X}_1 = 1 \cap X_2 = 2)$

$P(\mathbf{Z} = 2) = P(\mathbf{X}_1 = 2 \cap \mathbf{X}_2 = 1) + P(\mathbf{X}_1 = 1 \cap \mathbf{X}_2 = 2) = 1/6 + 1/6 = 1/3$

Le tableau qui suit représente la loi de **Z**.

Z	0	1	2	4	Total
P(**Z**=z)	1/3	1/6	1/3	1/6	1

2-La loi de la somme **G** = $\mathbf{X_1}$+$\mathbf{X}_2$ se traite de façons similaire :

$$S_G = \{1, 2, 3, 4\}$$

Loi de probabilité de G

G	1	2	3	4
P(G=g)	1/6	1/3	1/3	1/6

ESPERANCE MATHEMATIQUE ET MOMENTS NON CENTRES D'UNE VARIABLE ALEATOIRE DISCRETE

I Objectif

En statistique descriptive la moyenne arithmétique est la caractéristique de tendance centrale la plus utilisée pour résumer une distribution. **En probabilité, l'espérance mathématique d'une variable aléatoire X, noée E(X), est la caractéristique de tendance centrale la plus utilisée** pour résumer une distribution.

II L'essentiel à savoir

A- L'espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète: E(X)

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n	Total
P(X=x)	p_1	P_2	...	P_i	...	p_n	1

Par définition l'espérance mathématique de X est le nombre :

$$E(X) = p_1\, x_1 + p_2\, x_2 + \ldots + p_i\, x_i + \ldots + p_n\, x_n$$

$$E(X) = \sum_i p_i x_i$$

Remarque

E(X) est souvent noté μ ou m. Bien que le terme de moyenne soit communément employé pour désigner l'espérance mathématique, la signification n'est pas la même que la moyenne utilisée en statistique descriptive. Cette dernière se calcule avec des fréquences observées.

Exemple

Reprenons l'exemple de variable aléatoire proposée qui consiste à associer un gain à la couleur d'une boule obtenue par un tirage dans une urne.

E(X) = 0.25 x (-200) + 0.40 x 50 + 0.25 x100 + 0.10 x 300 = 25 Dhs

X= x	-200	50	100	300
P(X = x)	0.25	0.40	0.25	0.10

En jouant une fois, le gain espéré est de 25Dhs.

Remarque

En jouant un grand nombre de fois, par exemple 1000fois, le gain espéré est de 25000Dhs.

Le gain moyen $\bar{x} = \sum f_i \, x_i$ se rapproche de E(X) = 25 Dhs.

En effet, d'après la loi des grands nombres les fréquences observées f_i tendent vers leur probabilité d'apparition pi, ainsi :

$f_i x_i$tend vers $p_i x_i$ et $\bar{x} = \sum f_i \, x_i$ tend vers $\sum fp_i \, x_i$ = E(X)

B. Moments non centrés d'ordre h d'une variable aléatoire discrète : $E(X^h)$

. Définition

Si la fonction g est continue : $E(g(X)) = \sum_i p_i \; g(x_i)$

Si : $g(X) = X^h$, on obtient $m_h = E(X^h)$ moment centré d'ordre h

$$m_h = E(X^h) = p_1 x_1^h + p_2 x_2^h + \cdots + p_i x_i^h + \cdots + p_n x_n^h = \sum_i p_i x_i^h$$

h est un nombre entier.

Si h = 1, le moment d'ordre 1 est $m_1 = m = E(X)$

Si h = 2, le moment d'ordre 2 est $m_2 = m = E(X^2)$, il sert au calcul de la variance.

Exemple

Calculons le moment non centré d'ordre 2 pour l'exemple précédent.

$$E(X^2) = \sum_i p_i x_i^2 = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^h + p_4 x_4^h$$

$$= 0.25 \text{ x } (-200)^2 + 0.40 \text{ x } (50)^2 + 0.25 \text{ x } (100)^2 + 0.10 \text{ x } (300)^2$$

$$= 10000+1000+2500+9000=22500$$

III Compléments

A. Moments non centrés d'une variable aléatoire discrète prenant une infinité de valeurs.

Si X prend une infinité de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n, \ldots$ sont d'ordre infini, le moment d'ordre h est défini par :

$$m_h = E(X^h) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^h$$

Si cette expression n'a pas de limite, le moment d'ordre h n'existe pas.

De nombreux résultats en statistique mathématique et en probabilité sont liés l'existence des moments d'ordre 1 et 2 c'est-à-dire E(X) et $E(X^2)$.

B. Propriétés de l'espérance mathématique

Soient **X** et **Y** deux variables définies sur le même ensemble fondamental **Ω, α une constante réelle.**

$$E(\alpha X) = \alpha\, E(X)$$
$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

L'espérance mathématique est un opérateur linéaire.

Cette dernière propriété se généralise à n variables aléatoires

$$E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n)$$

C. Propriétés liée à l'indépendance : E(X Y) = E(X) E(Y)

Si **X** et **Y** sont indépendantes, alors E(**X** **Y**) = E(**X**) E(**Y**)

La réciproque est fausse, c'est-à-dire que si E(**X** **Y**) = E(**X**) E(**Y**), les variables **X** et **Y** ne sont pas nécessairement indépendantes en probabilité.

IV Application

Enoncé

Reprenons l'application précédente.

1-Rappeler la loi de probabilité des variables aléatoires Z et G, en déduire E(Z) et E(G).

2-Calculer E($\mathbf{X}_1$) et E($\mathbf{X}_2$) et retrouver à partir de ces résultats E(**Z**) et E(**G**).

Solution

Z	0	1	2	4
P(Z=z)	1/3	1/6	1/3	1/6

$$E(Z) = \sum_i p_i z_i = \frac{1}{3}.0 + \frac{1}{6}.1 + \frac{1}{3}.2 + \frac{1}{6}.4 = 1.5$$

G	0	1	2	4
P(G=g)	1/6	1/3	1/3	1/6

$$E(G) = \sum_i p_i g_i = \frac{1}{6}.1 + \frac{1}{3}.2 + \frac{1}{3}.3 + \frac{1}{6}.4 = 2.5$$

2-

$$E(\mathbf{X}_1) = = \frac{1}{2}.1 + \frac{1}{2}.2 \ = 1.5$$

$$E(\mathbf{X}_2) = = \frac{1}{3}.0 + \frac{1}{3}.1 + \frac{1}{3}.2 = 1$$

Par définition : $\mathbf{G} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$ et $\mathbf{Z} = \mathbf{X}_1 \,.\, \mathbf{X}_2$

$E(\mathbf{G}) = E(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) = E(\mathbf{X}_1) + E(\mathbf{X}_2) = 1.5 + 1 = 2.5$

$E(\mathbf{Z}) = E(\mathbf{X}_1\ \mathbf{X}_2) \quad = E(\mathbf{X}_1)\ E(\mathbf{X}_2)$ car $\mathbf{X}_1$ et $\mathbf{X}_2$ sont indépendantes.

$E(\mathbf{Z}) = (1.5).(1) = 1.5$
Ces derniers résultats sont bien identiques à ceux de la question 1.

VARIANCE ET MOMENTS CENTRES D'UNE VARIABLE ALEATOIRE DISCRETE.

I Objectifs

-Résumer une distribution ou une loi de probabilité par une seule caractéristique de valeur centrale telle que l'espérance mathématique est insuffisant. Après des expériences aléatoires, les réalisations de cette variable aléatoire se dispersent autour de cette valeur centrale. **La caractéristique de dispersion la plus utilisée est la variance. L'écart type est la racine carrée de la variance**.

- L'espérance mathématique et la variance (ou l'écart type) constituent les deux principales caractéristiques d'une variable aléatoire ou d'une loi de probabilité.

II L'essentiel à savoir

A. Définition de la variance et de l'écart type

Soit une loi de probabilité d'une variable aléatoire **X** définie par l'ensemble des couples (x_i, p_i)

X = x	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n	Total
P(**X**=x)	p_1	P_2	…	P_i	…	p_n	1

La variance de **X**, notée V(**X**) ou Var(**X**) est définie par $V(\mathbf{X}) = E[\mathbf{X}-E(\mathbf{X})]^2$

$$V(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} p_i\,(x_i - E(\mathbf{X}))^2$$

En posant E(**X**) = m, il vient : $V(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} p_i\,(x_i - m)^2$

L'écart type σ_X est la racine carrée de la variance : $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$ et il s'exprime dans la même unité que **X**.

B. Formule développée de la variance : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Exemple

Dans l'un des exemples précédents la variable aléatoire associée à la couleur des boules aboutit à $E(\mathbf{X}^2) = 22500$ et $E(\mathbf{X}) = 25$, ce qui donne $V(X) = 22500-(25)^2 = 21875 = (147.9)^2$, ainsi $\sigma_X = 147.9$

C. Propriété de la variance

- La variance d'une variable certaine (constante) est nulle : V(C) = 0

Une constante C est une variable aléatoire qui prend la valeur C avec une probabilité égale à un.

Remarque

la variance mesure la dispersion d'une variable aléatoire autour de l'espérance E(**X**). Plus la variance est élevée, plus la dispersion est grande et plus les réalisations x de la variable aléatoire **X** sont dispersées.

-V(**X**+C) = V(**X**)
-V(α**X**) = α^2 V(**X**)
En particulier si α = -1, α^2 = 1 d'où V(-X) = V(X)

D. Covariance et corrélation de deux variables X et Y

la covariance de deux variables aléatoires X et Y est définie par :

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = E[(\mathbf{X}-E(\mathbf{X}))(\mathbf{Y}-E(\mathbf{Y}))]$$

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = E(\mathbf{XY})-E(\mathbf{X}).E(\mathbf{Y})$$

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \sum_i \sum_j p_{ij}\ x_i\ y_j - (\sum_i p_i\ x_i)\ (\sum_j p_j\ y_j)$$

Si **X** et **Y** sont indépendantes : E(**X**).E(**Y**) = E(**XY**) et Cov(X,Y) = 0
Des formules précédentes il découle directement les propriétés :

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mathrm{Cov}(\mathbf{Y},\mathbf{X})$$

$$\mathrm{Cov}(\alpha\mathbf{X},\beta\mathbf{Y}) = \alpha\beta\mathrm{Cov}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$$

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{X},\mathbf{X}) = V(\mathbf{X})$$

Remarque

La covariance dépend du choix des unités de **X** et des unités de **Y**, aussi on utilise souvent le coefficient de corrélation linéaire qui est un nombre sans dimension.

$$-1 \leq \rho(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \frac{\mathbf{Cov(X,Y)}}{\sigma_{\mathbf{X}}\sigma_{\mathbf{Y}}} \leq 1$$

E. Moment centré d'ordre h

Par définition le moment centré d'ordre h par rapport à E(X) = m est μ_h tel que :

$$\mu_h = E[(X-m)^h] = \sum_{i=1}^{n} p_i\ (x_i - m)^h$$

Si h = 1, μ_1 = E[(X-m)] = E(X)-m = 0
Si h = 2, μ_2 = E[(X-m)²] s'appelle la variance.

III compléments

A. variable centré réduite

Soit une variable aléatoire **X** ayant pour espérance E(X) = m et écart type $\boldsymbol{\sigma_X}$

Elle vérifie E(**Y**) = 0 et V(**Y**) = σ_Y = 1

$Y = \frac{X-E(X)}{\sigma_X} \Rightarrow$ E(**Y**) = 0 et V(**Y**) = σ_Y = 1

B. Variance de l'addition de deux variables aléatoires

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,Cov(X,Y)$$
$$V(X-Y) = V(X) + V(Y) - 2\,Cov(X,Y)$$
$$V(\alpha X+\beta Y) = \alpha^2 V(X) + \beta^2 V(Y) + 2\alpha\beta Cov(X,Y)$$
$$V(\alpha X-\beta Y) = \alpha^2 V(X) + \beta^2 V(Y) - 2\alpha\beta Cov(X,Y)$$

Si X et Y sont indépendantes : Cov(X,Y) = 0, ainsi :
X et Y indépendants $\Rightarrow$ V(X+Y) = V(X) + V(Y)

Cette propriété se généralise à n variables $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n$ indépendantes.
$V(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \ldots + V(X_n)$
Cette dernière propriété est très importante, car elle est très utilisée dans la théorie de l'estimation.

IV Application

Enoncé 1

Les variables aléatoires utilisées dans les applications précédentes sont les suivantes :

$X_1 = x_1$	1	2		$X_2 = x_2$	0	1	2
$P(X_1=x_1)$	1/2	1/2		$P(X_2=x_2)$	1/3	1/3	1/3

La loi de $G = X_1 + X_2$ obtenue est la suivante :

G = g	1	2	3	4
P(G = g)	1/6	1/3	1/3	1/6

Les paramètres de ces lois déjà obtenues sont les suivantes :

$E(X_1) = \frac{3}{2}$, $E(X_2) = 1$, $E(G) = \frac{5}{2}$

1-Calculer $V(X_1)$, $V(X_2)$, V(G) à l'aide des tableaux précédents.
2-Calculer Cov (X_1,X_2)
3-Retrouver V(G) à partir de $V(X_1)$ et $V(X_2)$.

Solution

1-$V(X_1) = E(X_1^2) - (E(X_1))^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 2^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$V(X_2) = E(X_2^2) - (E(X_2))^2 = \frac{1}{3} \cdot 1^2 + \frac{1}{3} \cdot 2^2 - (1)^2 = \frac{2}{3}$

$V(G) = E(G^2) - (E(G))^2 = \frac{1}{6} \cdot 1^2 + \frac{1}{3} \cdot 2^2 + \frac{1}{3} \cdot 3^2 + \frac{1}{6} \cdot 4^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{11}{12}$

2-$Cov(X_1,X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2)$

En reprenant le tableau de la loi du couple il vient :

$E(X_1X_2) = \sum_i \sum_j p_{ij}\, x_{1i}\, x_{2j} = \frac{1}{6} .1.0 + \frac{1}{6} .2.0 + \frac{1}{6} .1.1 + \frac{1}{6} .2.1 + \frac{1}{6} .1.2 + \frac{1}{6} .2.2 = \frac{3}{2}$

$E(X_1)E(X_2) = \frac{3}{2} .1 = \frac{3}{2}$

Il en résulte $Cov(X_1,X_2) = 0$, ce qui est logique puisque les variables X_1 et X_2 sont indépendantes.

3- $V(G) = V(X_1) + V(X_2) + 2\, Cov(X_1,X_2)$

$V(G) = V(X_1) + V(X_2)$ car $Cov(X_1,X_2) = 0$

$V(G) = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{11}{12}$

Enonce 2

Trois étudiants passent un examen en fin d'année. Compte tenu de leur profil : assiduité, niveau de réflexion, travail fourni durant l'année, leurs chances de réussite sont estimées respectivement à 90%, 80%, 60%.

1-Calculer les probabilités que parmi ces trois étudiants, il y ait, respectivement : aucun admis, un admis, deux admis, trois admis.
2-Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'admis.de probabilité de X.
3-Déterminer la loi de probabilité de X.
Calculer l'espérance mathématique : E(X) et la variance de X : V(X)

Solution 2

1- A_i représente l'événement : l'étudiant numéro i est admis, $i \in \{1,2,3\}$

R_i représente l'événement : l'étudiant numéro i est refusé.

$R_i = \overline{A_i}$ donc : $P(R_i) = P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i)$

On obtient ainsi :

$P(A_1) = 0.90 \quad P(A_2) = 0.80 \quad P(A_3) = 0.60$

$P(R_1) = 0.10 \quad P(R_2) = 0.20 \quad P(R_3) = 0.40$

P(aucun admis) $= p_0 = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1) \times P(R_2) \times P(R_3) = 0.1 \times 0.2 \times 0.4 = 0.008$sans faire

Les événements étant supposés indépendants, ceci a permis de faire le produit des probabilités sans faire intervenir des probabilités conditionnelles. Si les

étudiants ne copient pas, cette hypothèse est plausible, mais s'ils copient, les résultats ne sont plus indépendants en probabilité.
Un admis veut dire un seul admis, c'est-à-dire : (le 1er est admis et le 2e est refusé et le 3e est refusé) ou (le 1er est refusé et le 2e est admis et le 3e est refusé) ou (le 1er est refusé et le 2e est refusé et le 3e est admis). Ceci permet d'écrire :
P(un admis) = $P((A_1 \cap R_2 \cap R_3) \cup (R_1 \cap A_2 \cap R_3)) \cup (R_1 \cap R_2 \cap A_3))$ = P(A∪B∪C)
Les événements reliés par les signes union « ∪ » étant deux à deux incompatibles :
P(A∪B∪C) = P(A) + P(B) + P(C)
$P(A_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(A_1)$x $P(R_2)$ x $P(R_3)$ = 0.90x 0.20 x 0.40 (indépendance en probabilité)
De même : $P(R_1 \cap A_2 \cap R_3)$ = 0.1 x 0.80 x 0.40
et $P(R_1 \cap R_2 \cap A_3)$ = 0.10 x 0.20 x 0.60
Le total de ces trois produits donne : **P(deux admis) = 0.116** = p_1
En procédant de la même façon pour deux, puis trois admis, on obtient :
P(deux admis) = 0.444 =p_2 **P(trois admis) = 0.432** = p_3
2-La loi de probabilité de X découle de ce précède

X =x	0	1	2	3
P(X = x)	0.008	0.116	0.444	0.432

Puisque : $p_i \geq 0$ et $\sum_i p_i = 1$, les couples (x_i,p_i) représentent bien une loi de probabilité
$E(X) = p_0x_0 + p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3$ = (0.008x0) +(0.116x1) + (0.144x2)+ (0.432x3) = 2.3
$E(X^2) = p_0x_0^2 + p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + p_3x_3^2$ = $(0.008x0^2)$ +$(0.116x1^2)$ +$(0.144x2^2)$ + $(0.432x3^2)$ = 5.672
$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 5.672 - (2.3)^2$ = 0. 382

LOI DE PROBABILITE D'UNE VARIABLE ALEATOIRE CONTINUE

I Objectif

. A chaque résultat d'une expérience aléatoire il peut être associé un nombre. Ce nombre, variable avec le résultat de l'expérience, **est une variable aléatoire**.

. Lorsque l'espace fondamental **Ω** est constitué d'une infinité non dénombrable d'éléments, chaque élément de Ω a une probabilité nulle de se réaliser et de ce fait les réalisations isolées x d'une variable aléatoire X ont une probabilité nulle de se réaliser.

. Dans ce cas, il est possible de calculer les probabilités qu'une réalisation x de la variable aléatoire **X** appartienne à un intervalle. A titre d'exemple, si **X** représente le temps de trajet d'un salarié pour se rendre de son domicile à son travail et qu'il met selon les conditions du trafic entre 30 et 60 minutes, chaque fois que ce salarié effectue un trajet, est associé à cette expérience le temps de trajet x. La probabilité que le temps de trajet soit égal à une valeur donnée, par exemple 35 minutes et 15 secondes, est nulle.. Par contre, des résultats du genre : la probabilité que le salaire mette entre 35 minutes et 15 secondes, est nulle. Par contre, des résultats du genre : la probabilité que le salarié entre 35 minutes et 45 minutes est de 0.42, peuvent être déterminés si les éléments concernant la loi de probabilité sont connus.

. Les deux notions les plus utilisées pour aboutir à un calcul des probabilités sont la densité de probabilité et **la fonction de répartition**. L'une comme l'autre permettent de calculer les caractéristiques d'une variable aléatoire continue : espérance, variance, moments. Ces calculs se font par un mode de **calcul intégral** au lieu de la sommation classique pour une variable discrète.

II L'essentiel à savoir

Une variable aléatoire continue prend ses valeurs dans un intervalle réel.

La notion d'espace probabilisé (**Ω, α**, P) peut être négligé car très souvent l'étude concrète fait abstraction de ces notions en utilisant directement les lois de probabilité des variables aléatoires.

A. Fonction de répartition F.

.Définition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire X est définie par :

$$F(x) = P(X \leq x)$$

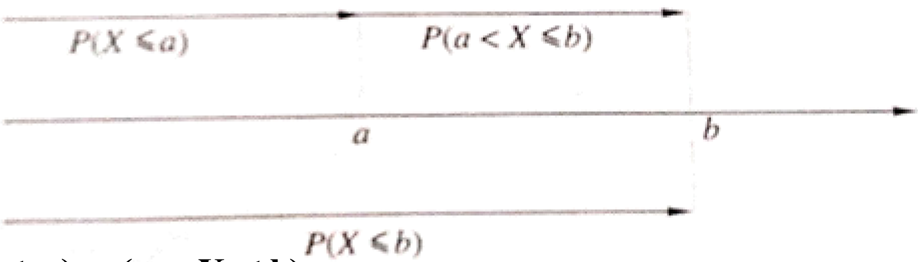
$P(X \leq x) = (x) = P(X < x)$

$P(X \leq x) = P(X < x) + P(X = x)$

$P(X \leq x) = P(X < x)$ car $P(X = x) = 0$

.**Probabilité d'un intervalle : $P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$**

Les nombres a et b sont des réels quelconques.



$(X \leq b) = (X \leq a) \cup (a < X \leq b)$

$P(X \leq b) = P(X \leq a) + P(a < X \leq b)$

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

Exemple

$F(x) = 1\text{-}e^{-x}$ si $x > 0$ et $F(x) = 0$ si $x \leq 0$

$P(1 < X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1) = F(2) - F(1) = (1-e^{-2}) - (1-e^{-1}) = e^{-1} - e^{-2} = 0{,}232$

B. Variable absolument continue et propriétés de F

. Définition

Une variable aléatoire X peut être définie par sa fonction de répartition. Si cette fonction est partout continue, dérivable sauf en un nombre fini de points, X est appelée variable aléatoire absolument continue. Dans la suite nous emploierons le terme variable continue pour ne pas alourdir l'exposé.

-a-Propriétés de F

. $0 \leq F(x) \leq 1$ pour tout x car F(x) est une probabilité

. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 1$

. F est croissante : $x_2 > x_1 \Rightarrow F(x_2) > F(x_1)$

Pour la démonstration de la croissance de F il suffit d'écrire :

$(X \leq x_2) = (X \leq x_1) \cup (x_1 \leq X \leq x_2)$

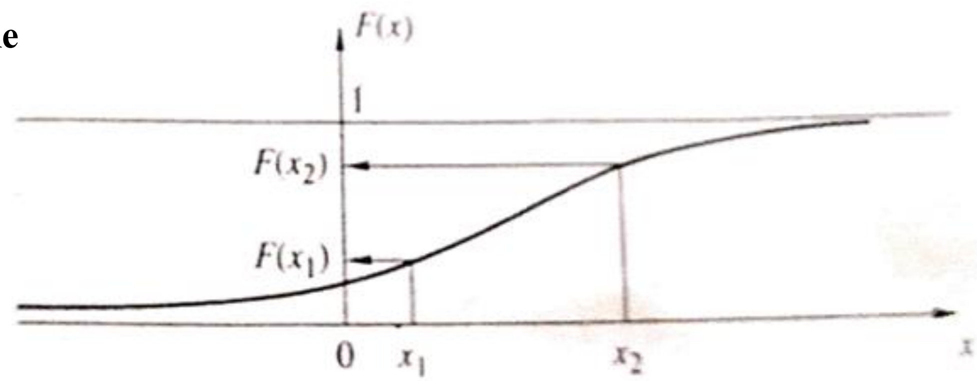
$P(X \leq x_2) = P(X \leq x_1) + P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(X \leq x_1) + (\text{Nombre} \geq 0)$

$P(X \leq x_2) \geq P(X \leq x_1) \Rightarrow F(x_2) > F(x_1)$

-b-F est fonction continue sur $\mathbb{R}$

-c-F est une fonction dérivable partout sur $\mathbb{R}$, seul éventuellement en un nombre fini ou dénombrable de points.

Exemple



C. Densité de probabilité

- Définition f(x) = F'(x)

En tout point où la fonction de répartition F est dérivable, la fonction f dérivée de F est sa densité de probabilité

$$F'(x) = f(x)$$

- Probabilité élémentaire : f(x)dx

$P(x \leq X \leq x + dx) = F(x + dx) - F(x) = f(x)dx$

Ce résultat put être démontré de façon sommaire :

$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

$$P(x < X \leq x + dx) = F(x + dx) - F(x) = \frac{F(x + dx) - F(x)}{(x + dx) - x}\, dx$$

Lorsque dx devient très petit, si F est dérivable au point x :

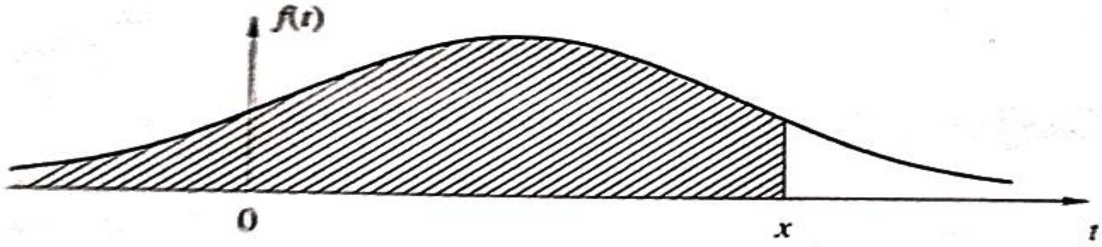
$$\lim_{dx \to 0} \frac{F(x + dx) - F(x)}{(x + dx) - x} = F'(x) = f(x)$$

d'où le résultat : $P(x \leq X \leq x + dx) = f(x)dx$

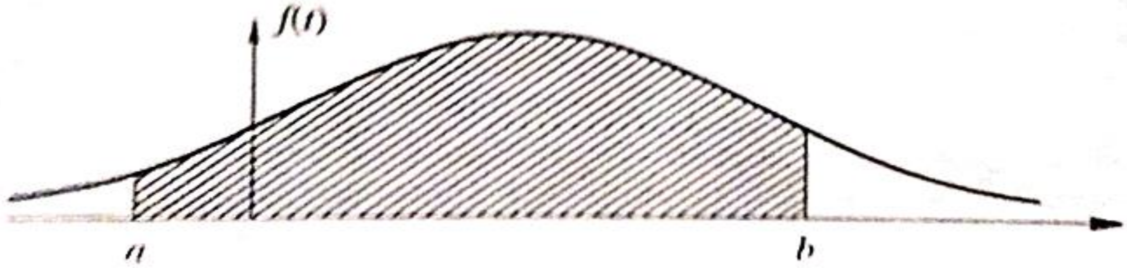
- Probabilité d'un intervalle

Ces probabilités s'obtiennent à partir de F ou d'une intégrale de f

$$P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \text{ (aire hachurée)}$$



$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(t)dt$$



Les aires hachurées représentent des probabilités et puisque :
$1 = \int_a^b f(t)dt$ aire totale sous la courbe est égale à 1.

.Propriétés caractéristiques d'une densité de probabilité

F est croissante donc sa dérivée f si elle existe est positive ou nulle.
f(x)dx = P(x $< X \leq x + dx) \geq 0$, ainsi $f(x) \geq 0$ **et le graphe est au dessus de l'axe des abscisses.** La fonction f est continue par morceaux**.**
$f(x) \geq 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$ sont deux propriétés caractéristiques d'une densité de probabilité.

IV Application

Enoncé

Soit une variable aléatoire X définie par sa fonction de répartition de la façon suivante :

$$\begin{cases} F(x) = 0 & \text{si } x \leq 0 \\ F(x) = a\,x^2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ F(x) = 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1-Déterminer la valeur de a.
2-Tracer le graphe de F et montrer que F n'est pas dérivable en tout point.
3-Déterminer la densité de probabilité f et tracer son graphe.
4-Déterminer la médiane me.
5-Calculer P($\left(\frac{1}{4} < X \leq \frac{1}{2}\right)$
6-Calculer P$\left(\frac{1}{4} < X \leq \frac{3}{4} / X > \frac{1}{3}\right)$

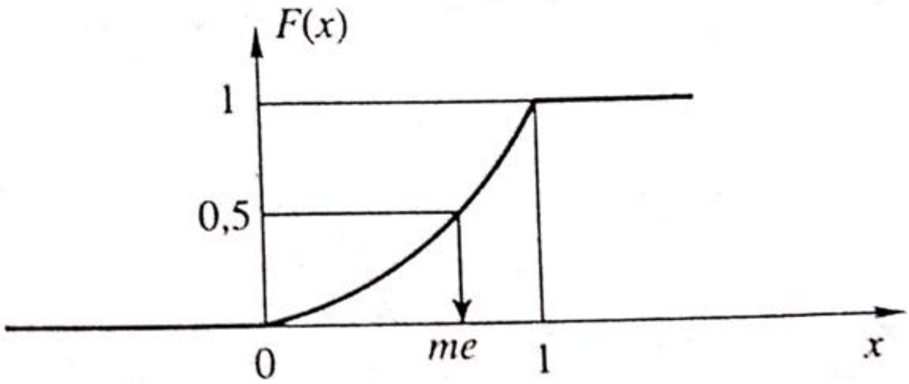
Solution

1-La fonction F doit être continue partout car la variable aléatoire X est continue. Sur chacun des trois intervalles $]-\infty, 0]$; $]0,1]$; $]1, +\infty[$ les expressions algébriques 0, ax^2, 1 représentent des fonctions continues. Il peut subsister un problème en $x = 0$ ou en $x = 1$. Pour que la fonction F soit continue en chacun de ces points il faut qu'en ces deux points la limite à gauche soit égale à la limite à droite.

Au point $x = 0$ la fonction est continue.

Au point $x = 1$, limite à gauche = a, limite à droite = 1, donc a =1.

2-**Graphe de F**



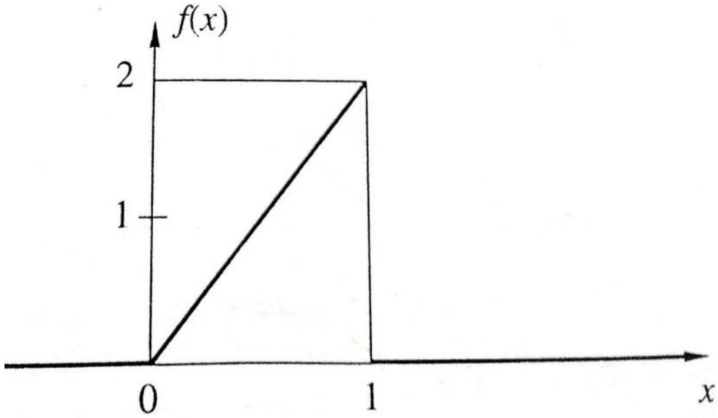
Remarque sur la dérivabilité de F.

Le graphe de F met bien en évidence la continuité de F.

Au point $x = 0$, elle est dérivable car la dérivée à gauche est égale à la dérivée à droite, c'est-à-dire zéro. Par contre, au point $x = 1$, la dérivée à gauche est égale à deux, car c'est la limite de $(x^2)' = 2x$ quand $x \to 1$ et la dérivée à droite au point $x = 1$ est nulle. Au point $x = 1$, la fonction F n'est pas dérivable.

3-La densité f s'obtient en dérivant la fonction F.

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = 2\,x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ f(x) = 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



La fonction f n'est pas continue en x = 1, la fonction F n'est pas dérivable en x = 1.

$f(x) \geq 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$ (facile à vérifier : c'est l'aire d'un triangle)

4-F(me) = 0.50

$F(me) = (me)^2 = 0.50 = \frac{1}{2}$ d-où me $= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0.707$

5-$P\left(\frac{1}{4} < X \leq \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2^2}\right) - \left(\frac{1}{4^2}\right) = \frac{3}{16}$

6- En posant $A = \frac{1}{4} < X \leq \frac{3}{4}$; $B = X > \frac{1}{3}$; $A \cap B = = \frac{1}{3} < X \leq \frac{3}{4}$

Il faut calculer $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ d'où

$$P\left(\frac{1}{4} < X \leq \frac{3}{4} /X > \frac{1}{3}\right) = \frac{P\left(\frac{1}{3} < X \leq \frac{3}{4}\right)}{P\left(X > \frac{1}{3}\right)} = \frac{F\left(\frac{3}{4}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - F\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{9}{16} - \frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{65}{128} \cong 0.507$$

ESPERANCE MATHEMATIQUE ET MOMENTS CENTRES D'UNE VARIABLE ALEATOIRE CONTINUE

I Objectif

L'espérance mathématique est la principale caractéristique de valeur centrale d'une variable aléatoire**. Les moments** permettent de définir d'autres caractéristiques d'une variable aléatoire : dispersion, asymétrie, etc. Le calcul de l'espérance mathématique et des moments nécessite l'utilisation du calcul intégral, au lieu des sommations classiques pour les variables aléatoires discrètes. La moyenne $\bar{x}$ des réalisations x_1, $x_2 \ldots . x_i \ldots x_n$ d'une variable aléatoire X fournit une valeur approchée ou estimée de l'espérance mathématique E(X) inconnue, il est possible de donner une idée de la marge d'erreur possible avec un intervalle de confiance.

A. L'espérance mathématique : E(X)

-Définition

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

f(x) est la densité de probabilité de **X** au point x.
Si la variable aléatoire X prend ses valeurs dans l'intervalle [a,b], c'est-à-dire :
en dehors de l'intervalle, f(x) = 0 alors $E(\mathbf{X}) = \int_a^b xf(x)dx$
E(X) est une moyenne pondérée de valeurs x comprises entre a et b donc :
$a < E(\mathbf{X}) < b$.
Pour la plupart des lois de probabilité E(X) existe, c'est-à-dire que E(X) est un nombre fini.

Exemple

$f(x) = 2x$ si $0 < x \leq 1$ et $f(x) = 0$ ailleurs.
C'est la densité de probabilité proposée dans l'application précédente.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{xf(x)dx} = \int_{-\infty}^{\mathbf{0}} \mathbf{x\ 0\ dx} + \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \mathbf{x\ 2x\ dx} + \int_{\mathbf{1}}^{+\infty} \mathbf{x\ 0\ dx} = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \mathbf{2x^2\ dx}$$

$= \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

En fait, les resultats des expériences sont de s nombres xcompris entre 0 et 1, car ailleurs la densité est nulle, il est logique que E(X) soit compris entre 0 et 1.

Remarque

Si une expérience aléatoire est répétée un grand nombre de fois, les réalisations de X sont $x_1, x_2 \ldots x_i \ldots x_n$ et $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ se rapproche de E(X) ($\bar{x} \to E(X)$ quand $n \to \infty$)

B. Moment non centrés d'ordre h : $E(X^h)$

Définition

Si g est une fonction continue : $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g(x)f(x)dx}$

Si $\mathbf{g(X) = X^h}$, on obtient le moment non centré d'ordre h.

$$m_h = E(X^h) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^h f(x)dx \qquad m_1 = E(X)$$

Exemple

f(x) = 2x **si** $0 < x \leq 1$ et f(x) = 0 ailleurs.

$$E(X^2) = \int_0^1 \mathbf{x^2 f(x)dx} = \int_0^1 \mathbf{x^2 2\, x\, dx} = \int_0^1 \mathbf{2x^3\, dx} = \left[\frac{2x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

C. Propriétés de l'espérance mathématique

$E(\alpha X) = \alpha\, E(X) \quad | \quad E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

α est une constante

Ce dernier résultat qui découle des propriétés des integrales se généralise à n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots X_i, \ldots, X_n$

$E(X_1+X_2+\ldots + X_n) = E(X_1)+ E(X_2)+\ldots + E(X_n)$

$$E\left(\sum_i X_i\right) = \sum_i E(X_i)$$

Cette propriété ne nécessite pas l'indépendance des variables X_i.

VARIANCE ET MOMENTS CENTRES D'UNE VARIABLE ALEATOIRE CONTINUE.

I Objectifs

L'espérance est la caractéristique de valeur centrale la plus utilisée. Pour résumer une distribution de probabilité, il faut la compléter par une caractéristique de dispersion. **La caractéristique de dispersion usuelle est la variance**. L'écart type est la racine carrée de la variance. Le calcul de la variance d'une variable aléatoire continue utilise le calcul intégral
au lieu de la sommation classique pour les variables discrètes.
Le moment centré d'ordre 3 permet de mesurer l'asymétrie d'une distribution.

II L'essentiel à savoir

A. Définition de la variance et l'écart type.

La variance d'une variable aléatoire de densité f est donnée par

$$V(X) = E[(X-E(X))^2]$$

En posant m = E(X), $V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-m)^2 f(x)dx$

Si la variable aléatoire X prend ses valeurs dans l'intervalle [a,b] alors $V(X)= \int_a^b (x-m)^2 f(x)dx$. **La variance est un nombre toujours positif.**
L'écart type est $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$, il est toujours positif.

B. Formule développée de la variance

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - m^2$

avec $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty}(x)^2 f(x)dx$ et $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

Exemple

Calcul de la variance et de l'écart type d'une variable aléatoire X dont la densité de probabilité est : si $0 \leq x \leq 1$ alors f(x) = 2x, sinon f(x) =0.

$E(X) = \int_0^1 x\ 2x\ dx = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$ $\quad E(X^2) = \int_0^1 x^2 2\ x\ dx = \left[\frac{2x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{2} - (\frac{2}{3})^2 = \frac{1}{18}$$

C. Propriétés de la variance

Ces propriétés sont les mêmes que pour les variables aléatoires discrètes.

$V(X+C) = V(X)$ où C désigne une variable aléatoire constante.

$V(\alpha X) = \alpha^2 V(X)$ où α désigne un nombre réel.

$V(-X) = V(X)$

D. Covariance de deux variables X et Y.

$Cov(X,Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))] = E(XY) - E(X)\,E(Y)$

$E(XY) = \iint_{\mathbb{R}^2} (xy) f(x,y)\,dxdy$, $E(X) = \int_{\mathbb{R}} x a(x)\,dx$ et $E(X) = \int_{\mathbb{R}} y a(y)\,dy$

a(x) est la densité de probabilité de X et b(y) est la densité de probabilité de Y

E. Moment centré d'ordre h

-Définition

Le moment centré d'ordre h par rapport à E(X) = m est défini par :

$\mu_h = E[(X-m)^h]\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^h f(x)\,dx$

$\mu_1 = E(X-m) = 0 \quad \mu_2 = \sigma_X^2$

-Relation entre les moments centrés et les moments non centrés d'ordre 2 et 3.

$\mu_2 = m_2 - m_1^2$ avec $m_2 = E(X^2)$ et $m_1 = E(X)$

$\mu_3 = m_3 - 3m_1 m_2 + m_1^2$ avec $m_3 = E(X^3)$

III Compléments

Il est rappelé ici quelques propriétés importantes déjà énoncées pour des variables aléatoires discrètes et qui restent valables pour des variables aléatoires continues.

. Variable aléatoire centrée réduite :

$$Y = \frac{X - E(X)}{\sigma_X} \quad E(\mathbf{Y}) = 0 \text{ et } V(\mathbf{Y}) = 1$$

. Variance d'une somme de variables aléatoires

$V(\mathbf{X}+\mathbf{Y}) = V(\mathbf{X}) + V(\mathbf{Y}) + 2\,Cov(\mathbf{X},\mathbf{Y})$

$V(\mathbf{X}-\mathbf{Y}) = V(\mathbf{X}) + V(\mathbf{Y}) - 2\,Cov(\mathbf{X},\mathbf{Y})$

$V(\alpha\mathbf{X}+\beta Y) = \alpha^2 V(\mathbf{X}) + \beta^2 V(\mathbf{Y}) + 2\,\alpha\beta Cov(\mathbf{X},\mathbf{Y})$

$V(\sum_i \mathbf{X_i}) = \sum_i V(\mathbf{X_i}) + \sum_i \sum_j Cov(\mathbf{X_i}, \mathbf{X_j})$ avec $i \neq j$

. Variance d'une somme de variable aléatoire indépendante.

Si **X** et **Y** sont indépendantes en probabilité, c'est-à-dire si la loi de Y sachant que **X** = x est la même que la loi de Y alors E(**XY**) = E(**X**) E(**Y**) et Cov(**X,Y**) = 0, ce qui permet d'écrire :

V(X+Y) = V(X) + V(Y) ou $\sigma^2_{X+Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_y$ et $\sigma_{XY} = \sqrt{\sigma^2_X + \sigma^2_y}$

Attention : ($\sigma_{XY} \neq \sigma_X + \sigma_Y$)

Ce résultat se généralise à **n variables aléatoires indépendantes** :

$$V(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \ldots + V(X_n)$$

IV Application

Enoncé

Soit une variable aléatoire X continue dont la densité est définit par :

Si x ≥ 0 alors f(x) = $\lambda e^{-\lambda x}$, sinon f(x) = 0, λ étant un réel positif.

1-Montrer que f définit une loi de probabilité.

2-Déterminer la fonction de répartition de X.

3-a-Calculer l'espérance mathématique de X

b-Calculer la variance V(X)

Solution

1-f(x) ≥ 0 et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = 1$

2-si x < 0 alors F(x) = 0

si x ≥ 0 alors F(x) = $\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$

3-a) E(X) = $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}\, dx$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}\, dx$ se calcule par une intégration par parties ou est obtenue par application des résultats sur la loi exponentielle

$$\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}\, dx = \left[x\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda}$$

d'où E(X) = $\frac{1}{\lambda}$

b) V(X) = $E(X^2) - (E(X))^2$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x)^2 f(x)dx$. En intégrant par parties, il vient :

$$E(X^2) = \left[x^2\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2x\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}dx = \frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}\, dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$